Chapitre 7

Les nombres premiers

I. Définition et existence

1) *Nombre premier dans* $\mathbb{N}$

Définition :

Dire qu'un **nombre entier naturel** est **premier** signifie qu'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Exemples :

- 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs dans $\mathbb{N}$.
- 1 n'est pas premier car il a un seul diviseur dans $\mathbb{N}$: lui-même.
- 2 est le plus petit nombre premier et le seul qui soit pair.

Remarque :

Un entier naturel n non premier (autre que 1 et 0) est un **nombre composé**.

Il admet au moins un diviseur d, autre que 1 et lui-même, qui vérifie $1 < d < n$.

Un tel diviseur est dit **diviseur strict** de l'entier n.

2) *Critère de primalité*

Propriétés :

n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

- n admet un diviseur premier.
- Si n n'est pas premier alors il admet un diviseur premier p inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Démonstration :

- Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. Si n est premier, il est un diviseur premier de lui-même.
- Si n n'est pas premier, il admet un diviseur positif autre que 1 et lui-même.

  L'ensemble E des diviseurs positifs, autre que 1 et n, est donc un ensemble d'entiers naturels non vide. Il a donc un plus petit élément que l'on note p.

  On raisonne par l'absurde.

Si p n'était pas premier, il existerait un diviseur propre d de p qui serait plus petit que p ; comme d diviserait p avec p qui divise n, d diviserait n.

Donc d serait un élément de E plus petit que p. C'est impossible.

Donc p est premier et divise n ; par suite il existe un entier q tel que $n = pq$ avec $1 < q < n$.

Donc q est un diviseur propre de n et par conséquent $p \leqslant q$.

On en déduit que $p^2 \leqslant pq$ soit $p^2 \leqslant n$ et donc $p \leqslant \sqrt{n}$.

Propriété (test de primalité) :

n désigne un nombre entier naturel $n \geqslant 2$.

Si n n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$, alors n est premier.

Démonstration :

Il s'agit de la contraposée de la propriété précédente.

Exemple :

Pour $n = 157$, $\sqrt{n} \approx 12{,}5$.

Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{157}$ sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11.

157 n'est divisible par aucun de ces nombres. Donc 157 est premier.

3) Ensemble des nombres premiers

Propriété :

Il existe une **infinité** de nombres premiers.

Démonstration :

On raisonne par l'absurde.

On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

On considère le nombre $a = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.

Ce nombre est supérieur ou égal à 2, il admet donc au moins un diviseur premier p_i parmi les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Cet entier p_i divise a et divise $p_1 p_2 \ldots p_n$, donc il divise la différence soit 1. C'est impossible.

Ainsi, il existe une infinité de nombres premiers.

4) Divisibilité d'un nombre premier

Propriété :

p est un **nombre premier** et *a* est un entier **non divisible par *p***.

Alors *p* et *a* sont **premiers entre eux**.

Démonstration :

p est un nombre premier donc ses seuls diviseurs sont 1 et *p*. *a* n'étant pas divisible par *p*, des deux diviseurs de *p*, seul 1 est un diviseur commun à *a* et *p* : *a* et *p* sont donc premiers entre eux.

Propriété :

p est un nombre **premier**.

- Si *p* divise le produit *ab* de deux entiers alors *p* divise *a* ou *p* divise *b*.
- Si *p* divise le produit *ab* de deux nombres premiers alors $p = a$ ou $p = b$.

Démonstrations :

- Si *p* divise *a*, le résultat est acquis.

  Si *p* ne divise pas *a*, alors d'après le théorème précédent, *p* est premier avec *a*. Il divise donc *b* d'après le théorème de Gauss.
- On a vu que *p* divise *a* ou *p* divise *b* qui n'admettent que deux diviseurs 1 et eux-mêmes. Comme *p* est différent de 1, $p = a$ ou $p = b$.

Cas particuliers :

- Si *p* (premier) divise a^2, alors *p* divise *a* et pour tout entier naturel non nul *n*, si *p* (premier) divise a^n, alors *p* divise *a*.
- Il résulte de cette propriété, par contraposition, qui si *p* (premier) ne divise pas *a*, alors *p* ne divise pas, par exemple a^p.

II. Décomposition en facteurs premiers

1) Existence et unicité d'une décomposition

Théorème fondamental :

Tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2 se **décompose** en un **produit** de **nombres premiers**.

Cette décomposition est **unique** à l'ordre des facteurs près.

On écrira $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ où $n \geqslant 2$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls.

Démonstration :

- **Existence**

  Soit n un entier, $n \geqslant 2$.

  On sait qu'il admet un diviseur premier p_1. Alors $n = p_1 n_1$ où $1 \leqslant n_1 < n$.

  - Si $n_1 = 1$ alors $n = p_1$ et la propriété est démontrée.
  - Si $n_1 \neq 1$ alors n_1 admet un diviseur premier p_2 et on a donc $n = p_1 p_2 n_2$ où $1 \leqslant n_2 < n_1$.

  On continue de la même façon tant que le quotient n_i est supérieur à 1.

  On forme ainsi une liste d'entiers $n_1, n_2, \ldots$ strictement décroissante et minorée par 1.

  Elle est donc finie (principe de descente infinie), c'est-à-dire qu'à un certain rang on a $n_m = 1$ et donc $n = p_1 p_2 ... p_m$ où les p_i sont des nombres premiers, pas nécessairement distincts. En regroupant les facteurs égaux entre eux on obtient l'écriture $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$.

- **Unicité**

  On suppose qu'un certain nombre premier p apparaît avec l'exposant $\alpha \geqslant 1$ dans une décomposition de n, et l'exposant $\beta \geqslant 0$ dans une autre (on envisage $\beta = 0$ pour le cas où p ne figurerait pas dans la deuxième décomposition). On a alors $n = p^{\alpha} a = p^{\beta} b$, où a et b sont des produits de nombres premiers distincts de p. Si $\alpha > \beta$, $p^{\alpha-\beta} a = b$, ce qui contredit que p et b sont premiers entre eux.

  Si $\alpha < \beta$, $a = p^{\beta-\alpha} b$, ce qui contredit que p et a sont premiers entre eux. Donc $\alpha = \beta$.

Exemples :

- $300 = 2 \times 150 = 2 \times 15 \times 10 = 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$
- $36 = 2^2 \times 3^2$
- $92 = 2^2 \times 23$
- $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$
- $125 = 5^3$

2) Conséquences

Propriété :

Si l'entier naturel n, supérieur ou égal à 2, admet pour décomposition en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, les diviseurs positifs de n sont les entiers $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ où $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant r_i \leqslant \alpha_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Démonstration :

- Les nombres de la forme $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ où $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sont des entiers tels que $0 \leqslant r_i \leqslant \alpha_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ sont clairement des diviseurs de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$.

- Réciproquement, en notant d un diviseur de $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, tout facteur premier de d divise n, donc appartient à la liste $p_1, p_2, \dots, p_k$. On en déduit que la décomposition en produit de facteurs premiers de d peut s'écrire par extension $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ avec $0 \leqslant r_i \leqslant \alpha_i$, le cas où $r_i = 0$ correspondant à l'absence de facteur p_i.

Propriété :

a et b désignent deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

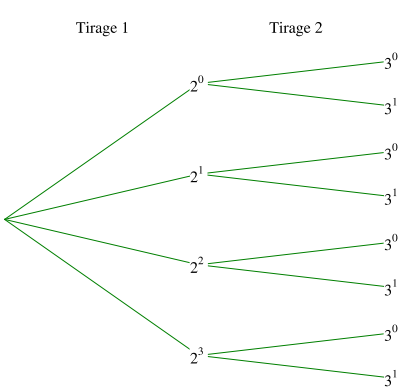
Le PGCD de a et b est égal au produit des facteurs premiers communs aux décompositions de a et b, chacun d'eux étant affecté du plus petit exposant avec lequel il figure dans a et b.

Exemples :

- $300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$ alors le nombre $2^1 \times 3^0 \times 5^2 = 50$ est un diviseur de 300.
- $24 = 2^3 \times 3^1$ donc 24 a pour diviseurs les entiers $2^\alpha \times 3^\beta$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 3$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.
- $2^2 \times 3^1 = 12$ est donc le PGCD de 300 et 24.

On peut lister tous les diviseurs de 24 à l'aide d'un arbre.

Cet arbre possède 4 × 2 branches donc 24 a 8 diviseurs.



$2^0 \times 3^0 = 1$

$2^0 \times 3^1 = 3$

$2^1 \times 3^0 = 2$

$2^1 \times 3^1 = 6$

$2^2 \times 3^0 = 4$

$2^2 \times 3^1 = 12$

$2^3 \times 3^0 = 8$

$2^3 \times 3^1 = 24$

Propriété :

Si un entier n, $n \geqslant 2$, admet la décomposition en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, n admet $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_k + 1)$ diviseurs positifs.

III. Petit théorème de Fermat

Petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a est un en entier naturel non multiple de p alors $a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.

Démonstration :

Soit p un nombre premier et a un entier naturel non multiple de p. Les entiers a et p sont donc premiers entre eux.

- Considérons l'ensemble des multiples de a suivants :

  $A = \{a\ ;\ 2a\ ;\ \dots\ ;\ (p-1)a\}$

  Ce sont $p-1$ multiples non nuls de a. L'entier p ne divise aucun d'eux. En effet, si p divisait ka (avec k entier, $1 \leqslant k \leqslant p-1$), puisque p est premier avec a, il diviserait k d'après le théorème de Gauss, ce qui est impossible puisque $k < p$.

  Donc leurs restes dans la division euclidienne par p sont non nuls et sont, par conséquent, des éléments de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ (p-1)\}$.

  Ces restes sont tous distincts : en effet, si deux entiers k et k' appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ (p-1)\}$, avec $k > k'$, étaient tels que $ka \equiv k'a\ [p]$ alors p diviserait $(k-k')a$.

  Or $1 \leqslant k-k' \leqslant p-2$ donc $(k-k')a$ est élément de A et aucun élément de A n'est divisible par p.

  On a donc $p-1$ multiples de a dont les restes dans la division euclidienne par p sont exactement, à l'ordre près, les entiers $1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ p-1$.

- Considérons maintenant le produit P de ces multiples de a.

  On a donc $P \equiv 1 \times 2 \times \dots \times (p-1)\ [p]$, c'est-à-dire $P \equiv (p-1)!\ [p]$.

  Donc p divise $P-(p-1)!$.

  Or en réordonnant les facteurs de P, on obtient $P = (p-1)! \times a^{p-1}$.

  Donc $P-(p-1)! = (p-1)! \times a^{p-1} - (p-1)! = (p-1)! \times (a^{p-1}-1)$.

  p divise $(p-1)! \times (a^{p-1}-1)$. Or p est premier et ne divise aucun des facteurs de $(p-1)!$. Il est donc premier avec $(p-1)!$.

  Donc d'après le théorème de Gauss p divise $(a^{p-1}-1)$.

Propriété :

Si p est un nombre premier et a un entier naturel alors $a^p \equiv a\ [p]$.

Démonstration :

On remarque que $a^p - a = a \times (a^{p-1}-1)$, donc $(a^{p-1}-1)$ divise (a^p-p) et si a est non nul, a divise (a^p-p).

- Si a n'est pas un multiple de p alors p divise $(a^{p-1}-1)$ et $(a^{p-1}-1)$ divise (a^p-p) donc par transitivité p divise (a^p-p).
- Si a est un multiple non nul de p alors p divise a et a divise (a^p-p) donc par transitivité p divise (a^p-p). Si a est nul, le résultat est clairement vrai.

Remarque :

Le petit théorème de Fermat permet d'effectuer des tests de primalité.

On souhaite savoir si le nombre n est premier. On choisit un nombre a et si a^n et a n'ont pas le même reste dans la division euclidienne par n alors, d'après la contraposée, n n'est pas premier.

La réciproque n'est pas vraie : il existe des nombres composés n tels que $a^n \equiv a\ [n]$, mais ceux-ci sont « rares ». Ces nombres sont appelés des nombres pseudopremiers. Il y en a deux types :

- **Les nombres de Poulet**

  Pour une valeur de a (ou quelques valeurs de a) n vérifie $a^n \equiv a\ [n]$ et est composé. On dit alors que n est un nombre de Poulet ou un pseudopremier de base a.

- **Les nombres de Carmichaël**

  Pour toutes valeurs de a comprise entre 2 et $n - 1$, n vérifie $a^n \equiv a\ [n]$ et est composé. On dit alors que n est un nombre de Carmichaël ou un pseudopremier absolu.

Le test de primalité consiste donc à choisir quelques valeurs de a et « teste » le nombre n en comparant les restes de a^n et a dans la division euclidienne par n. Si $a^n \equiv a\ [n]$ le test conclut que n est probablement premier.